

السؤال الأول : ( 15 درجة )

أوجد الحل العام للمعادلة  $(e^x - 1)y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$

بعد أن تثبت أنها تامة .

السؤال الثاني : (35 درجة )

لتكن لدينا المعادلة

$$(\cos 2x - 2 \sin 2x)y'' + 5 \cos 2x y' + (4 \cos 2x + 2 \sin 2x)y = e^{-x}(\cos 2x - 2 \sin 2x)^2$$

المطلوب : 1- أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

2- أوجد الحل العام للمعادلة

السؤال الثالث : (12 درجة )

اعتماداً على خواص المؤثر التفاضلي أوجد وبطريقتين مختلفتين

$$\text{ناتج مايلي } (D^2 + 2D + 1)x^2 e^{-x}$$

السؤال الرابع : (38 درجة)

لتكن لدينا المعادلة  $y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = e^{4x} + e^{-x}$

المطلوب : 1- أوجد  $y_h$  إذا علمت أن  $y_1 = e^{4x}$  حل خاص للمتجانسة المناظرة .

2- اقترح حلاً خاصاً "بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعيينها .

3- أوجد حلاً خاصاً "بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي . مظهر الحل العام .

\*\*\*\*\*



~~مسائل~~ مسائل تفاضلية ②

جواب السؤال الأول: [15] مسألة 15  
المعادلة في متغيرات

$$(e^x - 1)y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$$

$p_2 = e^x - 1$      $p_1 = 2e^x$      $p_0 = e^x$   
 $p_2'' - p_1' + p_0 = 0$     تكون المعادلة متجانسة إذا كانت في المتغيرات

$$p_2'' - p_1' + p_0 = e^x - 2e^x + e^x = 0$$

$B_1 y' + B_0 y = C_1$     أي أن المعادلة متجانسة بالمعادلة

$B_1 = p_2$      $B_0 = p_1 - p_2' = 2e^x - e^x = e^x$     تحقق شرط لي ط حيث  
 أي أن المعادلة

$$(e^x - 1)y' + e^x y = C_1 \Rightarrow \frac{d}{dx} (e^x - 1)y = C_1$$

بالدمج نجد أن  
 $(e^x - 1)y = C_1 x + C_2$   
 $y = \frac{C_1 x}{e^x - 1} + \frac{C_2}{e^x - 1}$     ومنه نجد أن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

طريقة ثانية

	$(e^x - 1)y'' + 2e^x y' + e^x y$	
$\frac{d}{dx} (e^x - 1)y'$	$(e^x - 1)y'' + e^x y'$	}
-	-	
$\frac{d}{dx} e^x y$	$0 \quad e^x y' + e^x y$	
-	$e^x y' + e^x y$	
	0 0	

أي أن المعادلة متجانسة بالمعادلة

$$(e^x - 1)y' + e^x y = C_1$$

$\frac{d}{dx} (e^x - 1)y = C_1$     تحقق شرط لي ط والمعادلة متجانسة بالمعادلة

$(e^x - 1)y = C_1 x + C_2$     بالدمج نجد أن

$y = \frac{C_1 x}{e^x - 1} + \frac{C_2}{e^x - 1}$     ومنه نجد أن  
 هو الحل العام المطلوب

\*\*\*\*\*



جواب السؤال الثاني (25 نقطة)  
المعادلة التفاضلية المتجانسة:  $(\cos 2x - 2\sin 2x)y'' + 5\cos 2x y' + (4\cos 2x + 2\sin 2x)y = 0$   
نأخذ الشكل  $y = e^{mx}$  على فرض اننا نبحث عن حلول

$$\begin{aligned} & (\cos 2x - 2\sin 2x)m^2 + 5\cos 2x m + (4\cos 2x + 2\sin 2x) = 0 \\ & \cos 2x (m^2 + 5m + 4) - 2\sin 2x (m^2 - 1) = 0 \\ & \cos 2x (m+1)(m+4) - 2\sin 2x (m+1)(m-1) = 0 \\ & (m+1) [(m+4)\cos 2x - 2\sin 2x (m-1)] = 0 \\ & m = -1 \text{ (حالة خاصة)} \quad m = \frac{4\cos 2x - 2\sin 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x} \end{aligned}$$

نأخذ الشكل  $y = e^{-x}$  على فرض اننا نبحث عن حلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة فوق علاقة التفاضل المتجانسة

$$y_h = y_1 \left[ \int \frac{C_1 e^{-x}}{y_1^2} dx + C_2 \right] = e^{-x} \left[ \int \frac{C_1 e^{-2x}}{\cos 2x - 2\sin 2x} dx + C_2 \right]$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{5\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x} dx = \int \frac{\cos 2x - 2\sin 2x + 2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x} dx \\ & = \int dx + \int \frac{2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x} dx = x + \ln(\cos 2x - 2\sin 2x) \\ & = (\cos 2x - 2\sin 2x) e^{-x} \end{aligned}$$

أيضا

$$y_h = e^{-x} \left[ \int \frac{C_1 (\cos 2x - 2\sin 2x) e^x}{e^{-2x}} dx + C_2 \right] = e^{-x} \left[ C_1 \int (\cos 2x - 2\sin 2x) e^x dx + C_2 \right]$$

$$= e^{-x} \left[ C_1 \int \cos 2x e^x dx - 2C_1 \int \sin 2x e^x dx + C_2 \right]$$

نستخدم قاعدة integration by parts:  $e^x dx = du \Rightarrow e^x = u$   
 $-2\sin 2x dx = dv \Rightarrow \cos 2x = v$

$$y_h = e^{-x} \left[ C_1 (e^x \cos 2x + 2 \int \sin 2x e^x dx) - 2C_1 \int \sin 2x e^x dx + C_2 \right]$$

أيضا

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 e^{-x}$$

هناك اسم للتفاضل المتجانس

$$y_1 = \cos 2x \quad y_2 = e^{-x}$$

$$W(e^{-x}, \cos 2x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & \cos 2x \\ -e^{-x} & -2\sin 2x \end{vmatrix} = e^{-x} (\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$$W_1 = -e^{-x} \cos 2x (\cos 2x - 2\sin 2x)$$



$$I W_2 = e^{-ix} (\cos ix - 2 \sin ix)$$

میں نے اپنے لئے ایک خاص

$$1) y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$6 \quad y_1 = e^{-x} \int -\cos 2x dx + \cos 2x \int e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - e^x \cos 2x$$

متن جان اعلیٰ السلام

$$1+5 \quad y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x - \frac{e^{-x}}{2} \sin x - e^{-x} \cos x$$

درجہ سوال نمبر: 6+6=12 انتہائی

2.  $\phi(n) e^{mx} \psi(x) = e^{mx} \phi(n+m) \psi(x)$  أولاً: ثم بتأدية الزخرفة الأخيرة

$$4. (D^2 + 1)D + 1) \bar{e}^{-x} x^2 = (D+1)^2 \bar{e}^{-x} x^2 = \bar{e}^{-x} (D-1+1)^2 x^2 = \bar{e}^{-x} D^2 x^2 = 2 \bar{e}^{-x}$$

سابقہ محکمہ تالیف و نشریات میں جو کام ہو رہا ہے اس کی اطلاع دینا چاہتا ہوں۔

$$1 \quad \phi(n) \times v(x) = x \phi(n) v(x) + \phi'(n) v(x)$$

$$1 \quad \phi(n) x^2 u(x) = x^2 \phi(n) u(x) + 2x \phi'(n) u(x) + \phi''(n) u(x)$$

وَتَعْلَمُ

$$\begin{aligned} 4 \quad (D+1)^2 x^1 e^{-x} &= x^2 (D+1)^2 e^{-x} + 2x \cdot 2(D+1)e^{-x} + 2e^{-x} \\ &= x^2 (-1+1)^2 e^{-x} + 4x(-1+1)e^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x} \end{aligned}$$

$$= x^2 (-1+1)^2 e^{-x} + 4x (-1+1) e^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}$$

الحرب

جواب السؤال الرابع:  $38 = 14 + 10 + 14$

$$y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$$

$$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$$

أريد المادحة التي في الشجرة

المادة المحترقة

معان  $x^4$  و  $y$  فبذلك  $a$  اقل ينقسم منه. لهذا  $4$  المبرك هو  $4 = 2^2$

$$(m-4)(m^3+3m^2+3m+1) = 0$$

ربانی ہے

$$(n-4)(n+1)^3 = 0$$

رسالت

$$m_2 = m_3 = m_4 = -1, \quad m_1 = 6 \quad \text{in } i, i$$

بني يابسة كل الاسم للقبلة انزله هو

$$y = A_1 e^{4x} + e^{-x}(A_2 x^2 + A_3 x + A_4)$$

ربنا الذي ياتيه كل الامم للتبليغ انه الله هو

$$y_2 = B_1 e^{4x} + B_2 e^{-x}$$

(١٥) الخالي من المصريح رقيق الدارة الخمسة هو

معمولاً اینها اشتراك بین  $\lambda$  و  $\lambda_n$  و لا خواتم می بیند  $e^{-x}$ ,  $e^{x^p}$

نفر بى هم باقى بود لا نزاع اشتراك بينهما الى ان احد المخرجين به السفر على هو

$$y_p = B_1 x e^{4x} + B_2 x^3 e^{-x}$$



1  $w_2 = e^{-2x} (\cos 2x - 2 \sin 2x)$  ربنا في بيانه اكل في ص

1  $y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$

6  $y_p = e^x \int -\cos 2x dx + \cos 2x \int e^x = -\frac{1}{2} e^x \sin 2x - e^x \cos 2x$  منه بان اكل الاسم هو

1+5  $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 \cos 2x - \frac{e^x}{2} \sin 2x - e^x \cos 2x$

جواب السؤال الثالث: 6+6=12 اثبات

2  $\phi(D) e^{mx} x^n = e^{mx} \phi(D+m) x^n$  اثبت: م بمثابة الزمرة التجميعية

4  $(D^2 + 2D + 1) e^x x^2 = (D+1)^2 e^x x^2 = e^x (D+1+1)^2 x^2 = e^x D^2 x^2 = 2e^x x$  ثابت: م بمثابة تأثير تفاضلي على جاد وايضا اذها اذلة x

1  $\phi(D) x y(x) = x \phi(D) y(x) + \phi'(D) y(x)$

1  $\phi(D) x^2 y(x) = x^2 \phi(D) y(x) + 2x \phi'(D) y(x) + \phi''(D) y(x)$

منه بان

4  $(D+1)^2 x^2 e^x = x^2 (D+1)^2 e^x + 2x \cdot 2(D+1) e^x + 2e^x$   
 $= x^2 (-1+1)^2 e^x + 4x (-1+1) e^x + 2e^x = 2e^x$

هو المطلوب

جواب السؤال الرابع: 38=14+10+14

$y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$  أثبت: المعادلة التفاضلية التفرعية هي

$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$

(14) المعادلة المميزة هي

معان  $x^4 = 0$  بيانه اكل ينتج منه هذا المعادلة الجذر هو  $m_1 = 4$

$(m-4)(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) = 0$

ربنا في بيانه

$(m-4)(m+1)^3 = 0$

منه بان

$m_1 = 4, m_2 = m_3 = m_4 = -1$

$y_h = A_1 e^{4x} + e^{-x} (A_2 x^2 + A_3 x + A_4)$  ربنا في بيانه اكل الاسم للتفاضلية التفرعية هو

ثابت

$y_p = B_1 e^{4x} + B_2 e^{-x}$

الكل من المقترح طبق اذلة التفاضلية هو

(15)

نلاحظ ان هناك اشتراك بين  $y_h$  و  $y_p$  اذ مشترك في  $e^{4x}$  و  $e^{-x}$  فغالب كل ما نأخذ لا نأخذ مشترك فيمكن اكل ان المقترح به المقترح هو

$y_p = B_1 x e^{4x} + B_2 x^3 e^{-x}$



$$y_p = \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} (e^{4x} + e^{-x}) \quad (P_{4f})$$

$$= \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{4x} + \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{-x} \quad 1+1$$

$$= \frac{x^4 e^{4x}}{4D^3 - 3D^2 - 18D - 11} + \frac{x^3 e^{-x}}{24D - 6} \quad 2+2$$

$$= \frac{x^4 e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \quad 1+1$$

$$y = y_h + y_p$$

الحل العام عندئذ يكون

$$y = A_1 e^{4x} + e^{-x} (A_2 x^2 + A_3 x + A_4) + \frac{x^4 e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \quad 3$$

\*\*\*\*\*

انتهى الحل

مدرسكم  
د. زكريا بن فزوح